

Dev n° 29Titre: Contre-ex. au thm de DirichletEsc:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, 2π -périodique t.q. $\forall x \in [0; \pi]$,

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2p^3+1) \frac{x}{2}\right).$$

On pose, $\forall k, n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt) \sin\left(\frac{2k+1}{2} t\right) dt$$

$$\text{et } s_{n,k} = \sum a_{i,k}$$

On a alors :

- f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- la série de Fourier de f diverge en 0.

Démon:* P.q. f déf et cont:

On a :

$$\forall x \in [0; \pi] \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

$$\left| \frac{1}{p^2} \sin\left((2p^3+1) \frac{x}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{p^2} \quad \text{terme générale d'une série cv.}$$

On a donc que la série cv sur $[0; \pi]$ et continue sur $[0; \pi]$.Par parité de f , et $f(0)=0$, on a la continuité sur $[-\pi; \pi]$.Or $f(\pi) = f(-\pi)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité.* Calcul de $a_{n,k}$:On a $\forall n, k \in \mathbb{N}$,

$$a_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt) \sin\left(\frac{2k+1}{2} t\right) dt$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) \left(\frac{e^{i(\frac{2k+1}{2}t)} - e^{-i(\frac{2k+1}{2}t)}}{2i} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{e^{it(\frac{2k+1}{2}+n)} - e^{-it(\frac{2k+1}{2}-n)}}{2i} + \dots dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}+n\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}-n\right)t\right) \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos\left[\left(\frac{2k+1}{2}+n\right)t\right] \frac{1}{k+\frac{1}{2}+n} + \cos\left[\left(\frac{2k+1}{2}-n\right)t\right] \frac{1}{k+\frac{1}{2}-n} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}+n} + \frac{1}{k+\frac{1}{2}-n} \right)$$

$$= \frac{1}{2k+1+n} + \frac{1}{2k+1-2n}$$

$$= \frac{1}{2k+1+2n} + \frac{1}{2k+1-2n}$$

$$= \frac{2k+1+2n}{(2k+1)^2 - 4n^2} + \frac{2k+1-2n}{(2k+1)^2 - 4n^2}$$

$$= \frac{4k+2}{(2k+1)^2 - 4n^2}$$

$$= \frac{k + 1/2}{(k + 1/2)^2 - n^2}$$

* 17.9 39,1 positifs:

* Donc, pour $n \leq k$ on a $a_{n,k} \geq 0$.

Donc, par $q \leq k$, $s_{q,k} \geq 0$.

* Par $q > k$: on remarque que les $a_{n,k}$ sont à facteurs $2/r$ pris les coef. de Fourier $a_n(g_k)$ avec $g_k: t \in [-\pi, \pi] \mapsto |\sin(k + \frac{1}{2})t|$ et g_k paire. (b_k nulle)
 g_k est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le thm de Dirichlet, la S.F. cv.s. vers g_k sur $\mathbb{R}$.

En particulier, en 0:

$$\frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \frac{\pi}{2} g_k(\sigma) = 0.$$

Donc $S_{q,k} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \frac{a_{0,k}}{2}$.

Or $(s_{q,k})_q$ décroissante à partir de $q=k$, (car $a_{n,k} \leq 0$ pour $q \geq k$), donc : $\forall q \geq k, s_{q,k} \geq \frac{a_{0,k}}{2} \geq 0$.

* Minoration des $S_{K,K}$

On a par $K \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 S_{k,k} &= \sum_{n=0}^k a_{n,k} \geq \sum_{n=1}^k \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - n^2} \\
 &\Rightarrow \sum_{n=1}^k \int_{n-1}^n \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - t^2} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{croissance de Pa fct} \\ t \mapsto \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - t^2} \end{array} \right. \\
 &= \int_0^k \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - t^2} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{CHASLES} \end{array} \right. \\
 &= \left[\frac{1}{2} p_n \left(\frac{k+1/2+t}{k+1/2-t} \right) \right]_{t=0}^{t=k} \quad \left(\frac{1}{2} p_n \left(\left| \frac{a+t}{a-t} \right| \right) \right)' = \frac{a}{a^2 - t^2} \\
 &= \frac{1}{2} p_n \left(\frac{2k+1/2}{1/2} \right) - p_n(1) \\
 &= \frac{1}{2} \log(4k+1)
 \end{aligned}$$

T erreur goursdon !

* 17.9 la S.F. diverge en 0:

Comme f est paire : $b_n(f) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$

On a, par $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

par calcul / $= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin \left[(2^p + 1) \frac{t}{2} \right] dt$ inversion sur cn

par calcul et grâce à la cv. n.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin \left[(2p^2+1) \frac{t}{2} \right] dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^\pi \sin \left[(2p^2+1) \frac{t}{2} \right] \cos(nt) dt \quad \left. \vphantom{\sum_{p=1}^{\infty}} \right\} \text{inversion sur cv n} \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} a_{n, 2p^2+1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Et } S_n(f) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n a_k(f) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} s_{n, 2p^2+1}$$

Or $s_{q,n} \geq 0$ et $s_{n,n} > \frac{\log n}{2}$ donc :

$$S_{2p^2+1} \geq \frac{1}{p^2} s_{2p^2+1, 2p^2+1} \geq \frac{1}{2p^2} \log(2p^2+1) = \frac{p^2+1}{2p^2} \log 2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty.$$

Donc, la série de Fourier de f diverge en 0. $\square$

Annexe:

* Thm Dirichlet:

Théorème : Soit f une fonction continue, C^1 par morceaux, 2π -périodique. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

* Primitive de $\frac{a}{a^2-t^2}$ est $\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+t}{a-t} \right)$

* Ici $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mais pas C^1 par morceau: elle est nulle part dérivable.

Démo:

* f est continue sur $\mathbb{R}$:

On a

$\forall p \in \mathbb{N}^*, x \in [0, \pi]$

$$\left| \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3+1}) \frac{x}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{p^2} \text{ terme d'une série convergente.}$$

Donc, la série cv normalement $\Rightarrow f$ bien définie et continue sur $[0, \pi]$.

De plus, f paire et $f(0)=0 \Rightarrow f$ continue sur $[-\pi, \pi]$.

$$\text{Et } \begin{cases} f(-\pi) = f(\pi) \\ 2\pi\text{-périodique} \end{cases} \Rightarrow f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

* Calcul des $a_{n,k}$:

On a :

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \int_0^\pi \cos(nt) \sin\left(\frac{2^{k+1}}{2} t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\left(\left(\frac{2^{k+1}}{2} + n\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2^{k+1}}{2} - n\right)t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+1/2+n} + \frac{1}{k+1/2-n} \right] \\ &= \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - n^2} \end{aligned}$$

* Positivité de $S_{q,k}$:

$\hookrightarrow$ pour $n \leq k$ on a $a_{n,k} \geq 0 \Rightarrow S_{q,k} \geq 0$ pour $q \leq k$

$\hookrightarrow$ pour $q > k$: Posons $g_k(t) = |\sin((k+1/2)t)|$, g paire.

On a : $a_n(g_k) = \frac{2}{\pi} a_{n,k}$ et $b_n(g_k) = 0$.

Or g_k est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Par le thm de Dirichlet la SF de g_k cv en 0:

$$\frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{\pi}{2} g_k(0) = 0$$

Donc $(S_{q,k})_q$ cv vers $\frac{a_{0,k}}{2}$ quand q tend vers $+\infty$.

Or $(S_{q,k})_q$ croissante pour $q \leq k$, donc décroissante à partir de $q \geq k$ et minorée par $\frac{a_{0,k}}{2}$.

Donc, $\forall q \geq k$, $S_{q,k} \geq \frac{a_{0,k}}{2} \geq 0$.

* Minoration $S_{n,k}$:

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\begin{aligned} S_{n,k} &\geq \sum_{n=1}^k \frac{(k+1/2)}{(k+1/2)^2 - n^2} \geq \sum_{n=1}^k \int_{n-1}^n \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - t^2} dt \\ &\geq \int_0^k \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log(4k+1) \geq \frac{1}{2} \log(k). \end{aligned}$$

* Conclusion:

Comme f paire $b_n(f) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Par calcul et cv. n on a $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} a_{n, 2^{p^3-1}}$

$$\text{Et } S_n(f) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} S_{n, 2^{p^3-1}}.$$

$$\text{Et } S_{2^{p^3-1}} \geq \frac{1}{2p^2} \log(2^{p^3-1}) = \frac{p^3-1}{2p^2} \log(2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc, la SF de f diverge en 0. $\square$